Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Rémi Jaoui

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 4
Abgabe: 23.11.2021

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei G eine nichttriviale Untergruppe der angeordneten additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +, <)$.

(a) Zeige, dass G dicht in $\mathbb{R}$ ist, falls $G \cap (0, \frac{1}{k})$ nichtleer für jedes $k \neq 0$ aus $\mathbb{N}$ ist.

HINWEIS: Die Gruppe $(\mathbb{R}, +, <)$ ist archimedisch: für alle reelle Zahlen $0 < x$ und $0 < y$ gibt es ein n aus $\mathbb{N}$ derart, dass $y < n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n}$.

(b) Schließe daraus, dass entweder G dicht ist oder ein kleinstes positives Element besitzt.

HINWEIS: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^{>0}$ besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

(c) Ziege, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, falls G ein kleinstes positives Element besitzt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Eine abelsche Gruppe $(\Gamma, +, 0_\Gamma)$ ist *angeordnet*, falls es eine lineare Ordnung $<$ auf Γ derart gibt, dass für alle γ, δ und ϵ mit $\gamma < \delta$, so ist $\gamma + \epsilon < \delta + \epsilon$.

(a) Zeige, dass jede angeordnete abelsche Gruppe torsionsfrei ist.

Eine Untergruppe $H \leq \Gamma$ ist *konvex*, falls jedes Element $0_\Gamma < \gamma$ aus Γ unmittelbar in H liegt, wenn $0_\Gamma < \gamma < h$ für ein h aus H.

(b) Beschreibe alle konvexen Untergruppen von $(\mathbb{R}, +, 0)$.

(c) Zeige, dass Γ keine echte konvexe Untergruppe endlichen Indexes besitzt.

(d) Falls $H \leq \Gamma$ konvex ist, zeige, dass die Gruppe Γ/H mit der Relation $x + H <_{\Gamma/H} y + H \iff x < y$ angeordnet ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei R ein Teilring eines Körpers K derart, dass für jedes $x \neq 0$ aus K das Element x oder sein Inverses x^{-1} in R liegt.

(a) Zeige, dass $K = \mathrm{Frac}(R)$.

(b) Zeige, dass R ein lokaler Ring ist.

(c) Sei $P(T)$ ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus R. Zeige, dass jede Nullstelle in K des Polynoms $P(T)$ in R liegt.

(d) Sei nun K eine beliebige (möglicherweise unendliche) algebraische Erweiterung von $\mathbb{F}_p$. Beschreibe alle Teilringe R von K mit x oder x^{-1} in R für $x \neq 0$.

HINWEIS: Nutze (c) und dass der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$ eine Vereinigung endlicher Körper ist.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.